# Extremwertaufgaben

Josef M. Länger, Helmut Maletzke
BG/BRG St. Pölten

## 1. VORBEMERKUNGEN

Extremwertaufgaben, die als Anwendung der Differentialrechnung behandelt werden, bereiten den Schülerinnen und Schülern oft erhebliche Schwierigkeiten

Vor allem bestehen unseren Erfahrungen zufolge diese im „Start" des Beispiels, in einer geeigneten und zielstrebigen Wahl der Variablen, nach der später zu differenzieren sein wird. Darüber hinaus werden sehr viele Fehler dann gemacht, wenn es gilt, die anderen Variablen durch die zuerst gewählte auszudrücken. Hier kommt es viel auf die bisherigen mathematischen Erfahrungen an uns auch „mathematische Kreativität" kann gefragt sein! Häufig kann auch beobachtet werden, dass von keiner Vereinfachungsmöglichkeit Gebrauch gemacht wird. Die Aufgabe wird dadurch komplizierter. Vielen Lernenden ist die Bedeutung der gewählten Variablen nicht bewußt. Auch vollkommen unsystematisches und sinnloses Probierverhalten („trial and error") kann beobachtet werden.

Mit dieser Beispielsammlung wollen wir Kolleginnen und Kollegen einen möglichen Weg aufzeigen, diese Aufgabengruppe im Unterricht zu präsentieren. Auch bessere Schüler können leicht entmutigt werden. Daher ist von besonderer Bedeutung, behutsam vorzugehen, Angaben klar zu analysieren, die Rechnung in Teilschritte aufzugliedern und langsam den Schwierigkeitsgrad zu steigern. Dieses Kapitel erfordert auch in besonderer Weise eine gute Vorbereitung durch den Lehrer.

Dabei scheint es sehr von Vorteil zu sein, dass die Textaufgaben, vor allem jene der 3. bis 5. Klasse, stets systematisch nach einer „Lösungsstrategie" behandelt werden und der Lehrer immer darauf drängt, diese auch einzuhalten. Auch bei scheinbar leichten Aufgaben sollte man diesen Grundsatz nicht über Bord werfen, sondern eher versuchen gerade anhand solcher Beispiele die Strategie klar hervorheben. Andernfalls ist der Einstieg bei schwereren Aufgaben sehr mühsam.

**Einige Aspekte beim Aufbau des Kapitels:**

- Wiederholung einer einfachen Textaufgabe, bei der die Teilschritte leicht überschaubar sind.
- Vergleich einer Textaufgabe mit einer Extremwertaufgabe. Die allgemeine Lösungsstrategie ist auch für den neuen Aufgabentyp anwendbar.
- Vollständige Kurvendiskussion durchführen, um die besondere Bedeutung des Extremwertes zu erkennen.
- Besprechung der Problematik von Randextrema.
- Berechnung anderer Werte zu Demonstrationszwecken.
- Modelle zu Geometrieaufgaben, bes. bei räumlichen Problemen.
- Praxisbezug: Welche Extremprobleme können gelöst werden?

# 2. LÖSUNGSSTRATEGIEN für Textaufgaben

1. **Wahl der Variablen:** Welche im Text vorkommende Größe soll als Variable gewählt werden? Manchmal gibt es nur eine Möglichkeit, oft auch zwei oder mehr. Wichtig ist, die Bedeutung der Variablen nicht zu vergessen, also anschreiben. Es erweist sich auch als günstig, die Veränderlichen nicht nur mit x zu bezeichnen, sondern ihrer Bedeutung entsprechend, z.B. t als Zeit bei einer Bewegungsaufgabe.

2. **Grundmenge:** Die Grundmenge ergibt sich auf Grund der Bedeutung der Variablen und geht aus dem Text hervor. Auf sie sollte nicht verzichtet werden, um allenfalls späteren Schwierigkeiten bei der Lösung vorzubeugen, z.B.: Wert außerhalb der Grundmenge, negative Abmessungen, Brüche statt natürlicher Zahlen, sinnlose Randextrema,...

3. **a) Ausdrücken durch die gewählte Variable:** Alle im Text vorkommenden Variablen müssen nun durch die in (1) gewählte Veränderliche ausgedrückt werden. Dabei ist die unnötige Einführung einer zweiten Variablen (auch vorübergehend) zu vermeiden. In vielen Fällen erweist sich eine Tabelle als sehr zweckmäßig, z.B. bei Mischungsaufgaben (Mengen, relativer Gehalt an Salz, absoluter Gehalt an Salz), Bewegungsaufgaben (Weg, Zeit, Geschwindigkeit), Zahlentheoretische Aufgaben (Ziffern, Wert der Ziffern, Wert der Zahl).
   **b) Welche Größen können gleichgesetzt werden?** Im Text kommt eine Gleichheitsbeziehung vor. Hat der Schüler nun in (3a) die einzelnen Größen übersichtlich geordnet, so wird dieser Ansatz sicher leichter gelingen. Man erhält nun durch Gleichsetzung zweier Terme die gewünschte Gleichung für die in (1) gewählte Variable.

4. **Lösung der Ansatzgleichung:** Die Lösung erfolgt nach dem Kalkül der Äquivalenzumformungen und bietet im Rahmen der Textaufgaben eher weniger Schwierigkeiten.

5. **Angabe der Lösungsmenge:** Allgemein wird man eine Zahl erhalten. In vielen Fällen stellt diese Zahl aber noch nicht die gesamte Antwort auf die im Text gestellte Frage (Fragen) dar. Daher kann es auch erforderlich sein, aus dieser einen Zahl noch weitere Aspekte der gesamten Antwort zu berechnen.

6. **Formulierung der gesamten Antwort:** Abschließend soll eine im Idealfall auch sprachlich einwandfreie Formulierung gefunden werden, die alle verlangten Zahlen umfasst. Allenfalls können auch Zusatzerklärungen gegeben werden.
   Beispiele: Die 3 Teilbeträge sind 200.- ATS / 150.- ATS / 500.- ATS.
   Die Züge treffen einander um 13.30 Uhr und zwar 224 km von Innsbruck entfernt.
   Die Abmessungen des ursprünglichen Rechtecks betragen 48 mm und 64 mm.

7. **Probe:** Sie ist im üblichen Sinne nicht durchführbar und damit eine Erschwernis für die Schüler.

**Bemerkungen:**

Nach Möglichkeit sollen keine Antworten, die von vornherein unmöglich erscheinen bzw. „überraschende Ergebnisse“ gegeben werden, wie:

- In dieser Klasse gibt es 16½ Kinder.
  (Bei Personenanzahl ist Grundmenge $\mathbb{N}$.)
- Die Tochter ist 44 Jahre alt, ihr Vater 16 Jahre.
  (Ungleichung!)
- Der Zug fährt von Wien nach Zürich in 12 Minuten.
  (Grobe Schätzung zweckmäßig!)
- Gerhard erhält von 500.- ATS einen Betrag von 780 .- ATS zurück.
  (Ungleichung, Intervall!)
- Der Zylinderradius ist 0.
  (Fragwürdiger Randwert)
- Die Glasscheibe des Fensters wiegt 68 Tonnen.
  (Schätzung aus der Alltagserfahrung)
- Gerlinde aß Eis um 16.000.- DM.
  (Preis – Menge)
- Die Ermäßigung war so groß, dass man nur mehr 137% bezahlen musste.
  (Definition von Prozent)

# 3. VEREINFACHUNGSMÖGLICHKEITEN

Oberstes Prinzip ist, dass durch allfällige Vereinfachungen weder Lösungen hinzukommen, noch verloren gehen dürfen.

1. **Konstanter Faktor:** Häufigste und einfachste Art, die Zielfunktion zu vereinfachen. Er gilt:
   $y = c.f(x)$ $\qquad \bar{y} = f(x)$ $\qquad y' = \bar{y}'$

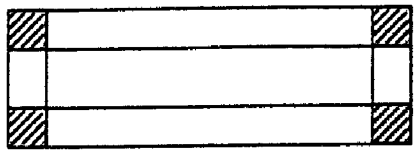
2. **Weglassen der Wurzel:** In vielen Fällen spielen Vorzeichendiskussionen keine Rolle, weil nur positive Werte sinnvoll sind (Geometrie).
   Es gilt: Hat der Wurzelwert ein Extremum, so auch der Radikand.
   $y = \sqrt{f(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow$ Ableitung des Wurzelradikands ist 0
   Die Art des Extremums ist dieselbe, wie man leicht durch weiteres Ableiten feststellen kann.

3. **Kehrwert (Art des Extremums):** Bei unangenehmen Bruchtermen kann es zweckmäßig sein, den Kehrwert nach dem anderen Extremum zu untersuchen, denn es gilt:
   $f(x) \to \max (\min) \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} \to \min (\max)$

4. **Sinnlose Randextrema:** Man beachte, dass beim Lösungsvorgang auch sinnlose Randextrema auftreten können, die zwar theoretisch richtig sind, aber für das gegenständlich Problem keinen Sinn ergeben.
   Beispiel: Die Abmessung ist 0 oder der Höchstwert.

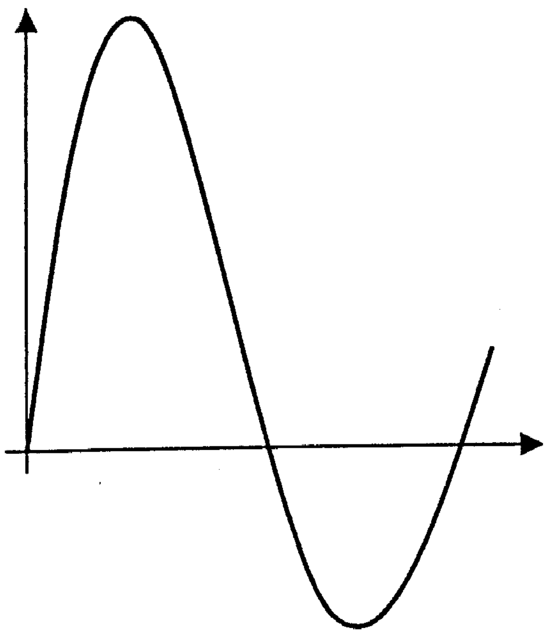
   **Ausscheiden von theoretischen Lösungen:** Der Zahlenwert ist zwar richtig, liegt aber außerhalb des Intervalles der Grundmenge. Beispiel: Länge l = -3.

# 4. EXTREMWERTAUFGABE als besondere TEXTAUFGABE

| | |
|---|---|
| Gegeben ist eine dreiziffrige Zahl, deren Ziffern aufeinanderfolgende Ziffern sind. Vertauscht man die Hunderterziffer mit der Einerziffer, so ist die neue Zahl um 36 kleiner als das Doppelte der ursprünglichen Zahl.<br>Wie lauten diese beiden Zahlen? | Ein Rechteck hat die Abmessungen l = 16 cm, b = 10 cm. Durch Abschneiden der Ecken in quadratischer Form erhält man das Netz für eine Schachtel (ohne Deckel). Wie groß muss man die abzuschneidenden quadratischen Stücke wählen, damit die Schachtel das größte Volumen erhält und wie groß ist dieses? |
| (1) Wahl der Variablen<br><br>$x$ = Hunderterziffer der 1. Zahl | (1) Wahl der Variablen<br><br>Stecke $x$ laut Skizze.<br> |
| (2) Grundmenge $G = \{1,2,3,4,5,6,7\}$<br><br>0 kommt nicht in Frage,<br>8,9 sind zu groß! | (2) Grundmenge = Nebenbedingung<br><br>$\frac{1}{2}l = 8$ E<br>$\frac{1}{2}b = 5$ E $\Rightarrow \{x \in 3 \mid 0 < x < 5\}$ |
| (3) Aufstellen von Termen<br>(Zweckmäßig in Tabellenform)<br><br>$z_1$ $z_2$<br>H: $x$ $x+2$<br>Z: $x+1$ $x+1$<br>E: $x+2$ $x$<br><br>Werte der Zahlen:<br>$z_1 = 100x + 10(x + 1) + 1(x + 2)$<br>$z_2 = 100(x + 2) + 10(x + 1) + 1x$<br><br>$z_2 + 36 = 2.z_1$ | (3) Aufstellen von Termen<br><br>$a = 16 - 2x \quad b = 10 - 2x \quad c = x$<br>$V_{Quader} = a.b.c$ ( in $E^3$)<br><br>Man erhält daher für das Quadervolumen:<br>$V = f(x) = x(16 - 2x)(10 - 2x)$<br>$V = f(x) = x(160 - 20x - 32x + 4x^2)$<br>$V = f(x) = x(4x^2 - 52x + 160)$<br><br>$V = f(x) = 4x^3 - 52x^2 + 160x$ |
| <u>Gleichsetzung von Termen:</u><br><br>$100(x + 2) + 10(x + 1) + x + 36 =$<br>$= 2[100x + 10(x + 1) + x + 2$<br><br>Alle vorkommenden Größen sind nun als Terme in $x$ dargestellt und die Beziehung zwischen diesen liefert die Gleichung zur Ermittlung von $x$. | Damit ist die „<u>Zielfunktion</u>", nach der später zu differenzieren sein wird, erstellt.<br><br>Alle 3 Abmessungen des Quaders wurden durch die Variable $x$ ausgedrückt.<br>Vereinfachungsmöglichkeit:<br>Division durch 4. Dies ergibt:<br>$\overline{V} = \overline{f}(x) = x^3 - 13x^2 + 40x$ |
| (4) Lösung der Ansatzgleichung:<br><br>$100x + 200 + 10x + 10 + x + 36 =$<br>$= 2(100x + 10x + 10 + x + 2)$ | (4) Ableitung der Zielfunktion und ihre Nullstellen<br><br>$\overline{V} = \overline{f}(x) = x^3 - 13x^2 + 40x$<br>$\overline{V}' = \overline{f}'(x) = 3x^2 - 26x + 40 = 0$ |

| | |
|---|---|
| $100x + 200 + 10x + 10 + x + 36 =$<br>$= 200x + 20x + 20 + 2x + 4$<br><br>$111x + 246 = 222x + 24$<br>$111x = 222$<br>$x = 2$ | $x^2 - \frac{26}{3}x + \frac{40}{3} = 0$<br>$(x - 2)(x - \frac{20}{3}) = 0$<br>$x_1 = 2 \quad x_2 = \frac{20}{3}$<br>$E_1(2/y_1) \quad E_2(\frac{20}{3}/y_2)$ |
| (5) Lösungsmenge<br><br>$2 \in G \Rightarrow L = \{2\}$ | (5) Lösungsmenge<br><br>$2 \in G$, jedoch $\frac{20}{3} \notin G \Rightarrow L = \{2\}$ |
| (6) Formulierung der Antwort:<br><br>Die ursprüngliche Zahl lautet 234 und demnach die neue Zahl 432. | (6) Formulierung der Antwort:<br><br>Es sind Quadrate mit 2 cm Seitenlänge von den Ecken abzuschneiden, sodass der entstehende Quader die Abmessungen a = 12 cm, b = 6 cm und c = 2 cm erhält. Das maximale Volumen beträgt dann 144 cm³. |
| (7) Probe:<br><br>$234.2 - 36 = 432$ oder<br>$468 = 36 + 432$ | (7) „Probe“ = Kontrolle<br><br>$V(1) = 14.8.1 = 112$<br>$V(3) = 10.4.3 = 120$ |

**Hinweise:** Einfaches Modell vorführen!
Berechnung des Volumens für x = 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 4. Bei x=5 und x=0 erhält man V = 0 (sinnlose Randextrema).
Eine 1. Klasse könnte mehrere Quader entsprechend der Angabe für Präsentation herstellen.



Kurvendiskussion:
Aus der Herleitung der Funktionsgleichung ergibt sich:

$y = 4x(x-5)(x-8)$

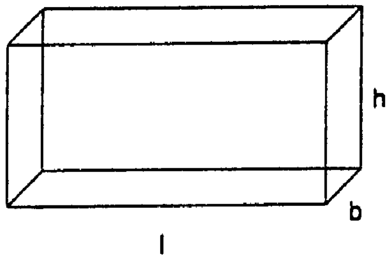
Daher:
$N_1(0/0)$; $N_2(5/0)$; $N_3(8/0)$

Extremwert nur Max(2/144) innerhalb des Intervalls [0;5], welches der Grundmenge entspricht.

# 5. BEISPIELE

## 1. Kantenmodell eines Quaders:

Aus einem 120 cm langen Draht soll ein Kantenmodell eines Quaders hergestellt werden, dessen eine Kante dreimal so lang ist wie eine andere Kante. Wie sind die Abmessungen des Quaders zu wählen, wenn sein Volumen maximal sein soll?

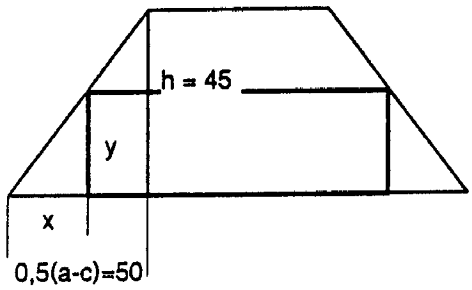



(1) $h$ = Höhe des Quaders
(2) $0 < h < 30$
(3) $K = 4(l + b + h) = 120$
$l + b + h = 30$
$l + 3h + h = 30$
$l = 30 - 4h$
(4) $V = l.b.h = h.3h.(30 - h)$
$f(h) = 90h^2 - 12h^3$
$f'(h) = 180h - 36h^2 = 0$
$36h\,(h - 5) = 0$
$h_1 = 0 \qquad h_2 = 5$
(5) $L = \{5\}$
(6) $l = 10$ cm $b = 15$ cm $\quad h = 5$ cm $\qquad V_{max} = 750$ cm³

Bemerkungen:
Kantenmodell eines Quaders vorzeigen.
Nachvollzug von $l + b + h = 30$ mit kleinen Zahlen ist leicht möglich.
Kurvendiskussion von $f(h)$ ist leicht: $N_1 = N_2(0/0)$, $N_3(7{,}5/0)$
$E_1(0/0)$, $E_2(5/750)$
$W(2{,}5/375)$

## 2. Trapez mit eingeschriebenem Rechteck:

Ein gleichschenkeliges Trapez ist durch $a = 160$ E, $c = 60$ E und $h = 45$ E gegeben. Diesem sind Rechtecke so einzuschreiben, dass sie eine Seite auf der Basis des Trapezes liegen.
Welche Maße hat das flächengrößte Rechteck?

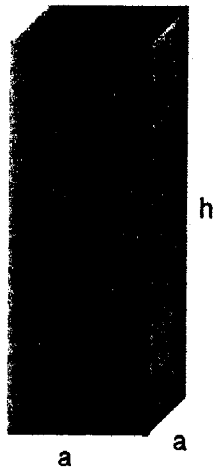



(1) $x$ = Strecke laut Skizze
(2) $0 < x < 80$
(3) Wegen Strahlensatz gilt:
$y : x = 45 : 50 = 0{,}9$
$y = 0{,}9x$
(4) $A = y(160 - 2x) = 0{,}9x(160 - 2x)$
$f(x) = 160x - 2x^2$
$f'(x) = 160 - 4x = 0$
$x = 40$
(5) $L = \{40\}$
(6) $A = 0{,}9.40.(160 - 2.40) = 36.80 = 2880$

Bemerkungen:
Sinnlose Randextrema: Bei $x = 0$ und $x = 80$ erhält man $A = 0$ E²
Die Kurvendiskussion liefert: $N1(0/0)$, $N2(80/0)$
$H(40/2880)$

**3. Quadrische Säule:**

Welche quadrische Säule mit der Oberfläche O = 240 cm² hat den größten Rauminhalt und wie groß ist dieser?




(1) a = Seite des Grundquadrates
(2) a > 0 (als Streckenlänge
(3) $O = 2a^2 + 4ah = 240$

$a^2 + 2ah = 120$

$2ah = 120 - a^2$

$h = \dfrac{120 - a^2}{2a}$

$\Rightarrow$ ad (2): $120 - a^2 < 0$

$a^2 < 120$

also: $0 < a < \sqrt{120}$

(4) $V = a^2h = a^2\,\frac{120-a^2}{2a} = \frac{1}{2}a(120 - a^2)$

$f(a) = 120a - a^3$

$f'(a) = 120 - 3a^2 = 0$

$a^2 = 40$

(5) $L = \{\sqrt{40}\}$

(6) $V_{max} = a^2h = 40\,\frac{120-40}{2\sqrt{40}}\ cm^3 = 40.\frac{40}{\sqrt{40}}\ cm^3 = 40\sqrt{40}\ cm^3$

Bemerkungen:

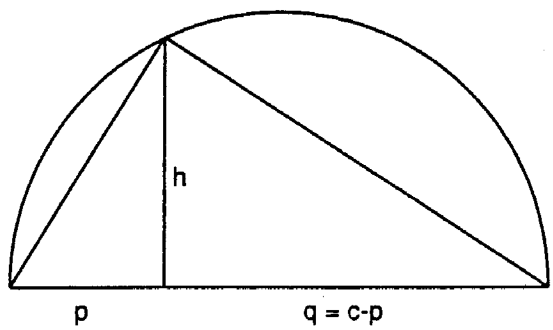
Modell eines solchen Körpers mitnehmen.

Kurvendiskussion liefert: $N_1(0/0)$, $N_2(\sqrt{120}/0)$, $N_3(-\sqrt{120}/0)$;

$E_1(\sqrt{40}/40\sqrt{40})$, $E_2(-\sqrt{40}/y_{E2})$.

**4. Rechtwinkeliges Dreieck mit maximaler Fläche:**

Über der gegebenen Hypotenuse c ist jenes rechtwinkelige Dreieck zu errichten, welches die größte Fläche hat. Zeige, dass das rechtwinkelig-gleichschenkelige Dreieck (= halbes Quadrat) diese Bedingung erfüllt!




(1) p = enabschnitt
(2) $0 < p < c$
(3) $A = \frac{c}{2}h$

Höhensatz: $h = pq$ mit $q = c - p$

$A = \frac{c}{2}\sqrt{p(c-p)}$

$A^2 = (\frac{c}{2})^2 p(c - p)$

(4) $f(p) = p(c - p) = cp - p^2$

$f'(p) = c - 2p = 0$

$p = \frac{c}{2}$

(5) $L = \{\frac{c}{2}\}$

(6) Die Maximalforderung ist für die halbe Hypotenuse als Höhe erfüllt. Damit ist p = q und daher auch a = b. es liegt also ein gleichschenkeliges rechtwinkeliges Dreieck vor.

Bemerkungen:
Es ist sofort einsichtig, dass der maximale Flächeninhalt bei maximaler Höhe erreicht wird.
Bei zahlreichen Aufgaben liegt der Typ $y = x(a - x) = ax - x^2$ vor, wobei a eine Konstante ist. Der Extremwert liegt dann, wie oben zu sehen ist, in der Mitte zwischen 0 und a.

## 5. Gleichschenkeliges Dreieck (HERON'sche Flächenformel):

Zeige: Von allen Dreiecken mit gegebener Seite c und gegebenem Umfang U hat das gleichschenkelige Dreieck den größten Flächeninhalt!

(1) a = Dreieckseite
(2) $0 < a < U - c$
(3) $b = U - (c + a)$
$2s = U$
$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
$A^2 = s(s - a)(s - b)(s - c)$
$A^2 = s(s - c)[s^2 - (a + b)s + ab]$
$A^2 = s(s - c)[s^2 - (U - c)s + aU - a(c + a)]$
$f(a) = Ua - ca - a^2 + s^2 - (U - c)s$
(4) $f'(a) = U - c - 2a = 0$
(5) $L = \{\frac{U-c}{2}\}$
(6) $b = a$

## 6. Kanalbau:

Ein Kanal hat einen rechteckigen Querschnitt von A E². Welche Abmessungen muss man dem Rechteck geben, damit für die Ummauerung am wenigsten Material verbraucht wird? Der Kanal ist oben offen!


(1) l = Länge des Rechteckes
(2) $0 < l < A$
(3) $A = l.b \Rightarrow b = \frac{A}{l}$
$U = l + 2b$
$U(l) = l + 2\frac{A}{l}$
(4) $U'(l) = 1 - \frac{2A}{l^2} = 0$
$l^2 = 2A$
(5) $L = \{\sqrt{2A}\}$
(6) $b = \frac{A}{l} = \frac{A}{\sqrt{2A}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{2}} = \frac{l}{2}$
Das Rechteck ist doppelt so breit wie lang. Das bedeutet, es besteht aus zwei aneinandergereihten Quadraten.

## 7. Drehung eines Rechtecks zu einem Zylinder:

Ein Rechteck vom Umfang U dreht sich um eine seiner Seiten. Wie müssen die Abmessungen gewählt werden, damit
a) der Mantel
b) das Volumen
des entstehenden Drehzylinders möglichst groß wird?

a)

(1) l = Länge (= r)

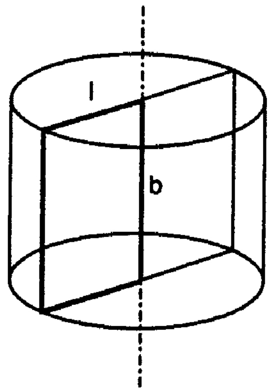
(2) $0 < l < \frac{U}{2}$

(3) $U = 2(l + b)$

$b = \frac{U}{2} - l$

$M = 2r\pi h = 2\pi rh$

$f(l) = rh$




(4) $f(l) = l(\frac{U}{2} - l) = \frac{U}{2}l - l^2$

$f'(l) = \frac{U}{2} - 2l = 0$

$l = \frac{U}{2}$

(5) $L = \{\frac{U}{4}\}$

(6) $b = l = \frac{U}{4} \Rightarrow$ Das Rechteck ist ein Quadrat.

b)

(1) wie oben

(2) wie oben

(3) $V = r^2\pi h = l^2\pi b$

$f(l) = l^2(\frac{U}{2} - l)$

$f(l) = \frac{U}{2}l^2 - l^3$

(4) $f'(l) = Ul - 3l^2 = 0$

$l(U - 3l) = 0$

$l_1 = 0 \qquad l_2 = \frac{U}{3}$

(5) $L = \{\frac{U}{3}\}$

(6) $b = \frac{U}{6} \quad \Rightarrow \quad l = 2b$

**<u>8. Regattaboje 1:</u>**

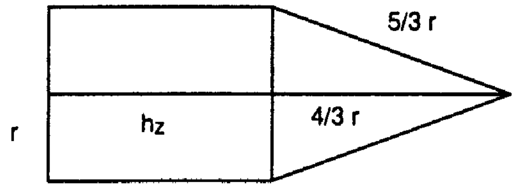
Ein Schwimmkörper hat die Gestalt eines Zylinders mit aufgesetztem Kegel (d.h.: die beiden Teile haben gleich große Basiskreise). Die Höhe des Kegels beträgt $\frac{2}{3}$ des Durchmessers des Basiskreises.

a) Wie sind die Abmessungen von Zylinder und Kegel zu wählen, damit bei vorgegebenem Volumen $V = 384\pi$ E³ am wenigsten Material zum Bau verbraucht wird?

b) Zeige, dass dabei Zylinder und Kegel gleich hoch sind!

(1) r = gemeinsamer Radius

(2) $r > 0$




(3) $O = A_{Basiskreis} + M_{Zylinder} + M_{Kegel}$

$V = V_{Zylinder} + V_{Kegel} = 384\pi$

$r^2h_Z\pi + r^2\frac{4}{3}r\frac{1}{3}\pi = 384\pi$

$r^2h_Z + \frac{4}{9}r^3 = 384$

$r^2h_Z = 384 - \frac{4}{9}r^3$

$h_Z = \frac{384}{r^2} - \frac{4}{9}r$

$O = r^2\pi + 2r\pi h + r\pi s$

$O = (r^2 + 2rh + \frac{5}{3}r^2)\pi$

$O = (\frac{8}{3}r^2 + 2rh)\pi = [\frac{4}{3}r^2 + r(\frac{384}{r^2} - \frac{4}{9}r)]2\pi$

$O = [(\frac{4}{3} - \frac{4}{9})r^2 + \frac{384}{r}]2\pi$

$O = (\frac{8}{9}r^2 + \frac{384}{r})2\pi$

$O = (\frac{1}{9} + \frac{48}{r})16\pi$

(4) $f'(r) = \frac{2}{9}r - \frac{48}{r^2} = 0$

$\frac{2}{9}r = \frac{48}{r^2}$

$r^3 = 216$

(5) $L = \{6\}$

(6) $h_{Kegel} = 8\ E$

$s_{Kegel} = 10\ E$

$h_{Zylinder} = \frac{384}{36} - \frac{4}{9}\cdot 6 = \frac{32}{3} - \frac{8}{3} = \frac{24}{3} = 8$

$O = (\frac{8}{3}.36 + 2.6.8)\pi = (96 + 96)\pi$

$O = 128\pi\ E^2$

**9. Ausschneidebogen für eine Pyramide:**

Aus einem quadratischen Stück Karton von 10 cm Seitenlänge werden 4 kongruente gleichschenkelige Dreiecke, deren Basen die Quadratseiten sind, so weggeschnitten, dass man das Netz einer quadratischen Pyramide erhält.
Wie sind die Abmessungen der Pyramide zu wählen, damit sie das größte Volumen erhält?

(1) a = Seitenlänge des Basisquadrates

(2) (2) $0 < a < 5\sqrt{2}$

(3) Seitenflächenhöhe $h = 5\sqrt{2} - \frac{1}{2}a$

$h^2 = 50 - 5\sqrt{2}\,a + \frac{a^2}{4}$

Körperhöhe H: $H^2 = h^2 - \frac{a^2}{4}$

$V = \frac{1}{3}a^2H$

$V^2(a) = \frac{1}{9}a^4H^2 = \frac{1}{9}a^4(50 - 5\sqrt{2}\,a)$

$V^2(a) = \frac{5}{9}(10a^4 - \sqrt{2}a^5)$

$f(a) = 10a^4 - \sqrt{2}a^5$

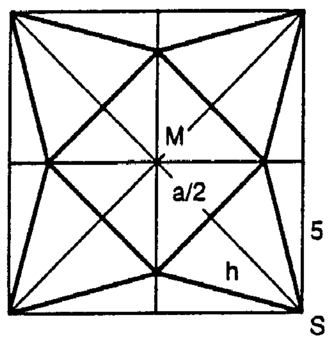
(4) $f'(a) = 40a^3 - 5\sqrt{2}\,a^4 = 0$

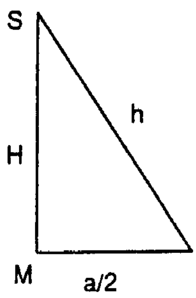
$5a^3(8 - \sqrt{2}\,a) = 0$

(5) $L = \{4\sqrt{2}\}$

(6) $H^2 = 50 - 5\sqrt{2}.4\sqrt{2} = 50 - 40 = 10$

$V = \frac{1}{3}32\sqrt{10}\ E^3 \approx 33{,}73\ E^3$



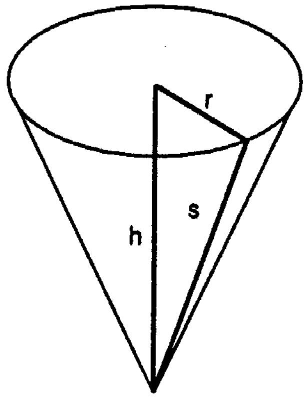

Bemerkungen:
Papier für jeden Schüler mitnehmen, ausschneiden lassen.
Selber vorher Modell anfertigen und mitnehmen.

**10. Kegelförmiger Trichter:**

Ein kegelförmiger Trichter soll ein Volumen von $V = 36\pi\ cm^3$ Flüssigkeit fassen. Damit an seinen Wänden möglichst wenig Flüssigkeit durch Adhäsion verloren geht, soll er eine möglichst kleine Wandfläche haben. (Man denke an die Filtrierung in Chemie!)

Welche Abmessungen sind zu wählen?

(1) h = Körperhöhe
(2) $0 < h$
(3) $r^2 + h^2 = s^2$




$V = \frac{r^2\pi h}{3} = 36\pi$

$r^2h = 108$ $\qquad r^2h^2 = 108h$

$r^2 = \frac{108}{h}$

$r^4 = (\frac{108}{h})^2$

$M = r\pi s$

$M^2 = r^2\pi^2s^2 = \pi^2r^2(r^2 + h^2) = \pi^2(r^4 + r^2h^2)$

$M^2 = \pi^2(\frac{108^2}{h^2} + 108h)$

$M^2 = 108\pi^2(\frac{108}{h^2} + h)$

$f(h) = \frac{108}{h^2} + h$

(4) $f'(h) = -\frac{2 \cdot 108}{h^3} + 1 = 0$

$h^3 = 216$

(5) $L = \{6\}$

(6) $r^2 = \frac{108}{6} = 18$

$r = 3\sqrt{2}$

$s^2 = r^2 + h^2 = 18 + 36 = 54$

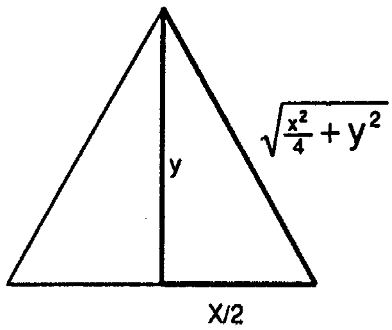
$s = 3\sqrt{6}$

$M = 3\sqrt{2} . \pi . 3\sqrt{6}$

$M = 18\sqrt{3}\,\pi\ cm^2 \approx 97{,}94\ cm^2$

**11. Turm mit Dach:**

Ein Turm mit quadratischer Grundfläche soll ein pyramidenförmiges Dach mit 100 m³ Fassungsraum erhalten, wobei die Dachfläche minimal sein soll.
a) Welche Abmessungen hat das Dach?
b) Wie weit steht es vor?
c) Welchen Neigungswinkel haben die Dachflächen?




(1) x = Seitenlänge das Basisquadrates
(2) $x > 0$
(3) y = Körperhöhe

$V = \frac{x^2y}{3} = 100$

$x^2y = 300$

$y = \frac{300}{x^2}$

$A = 4.A_{Dreieck}$

$A = 4\frac{x}{2}\sqrt{\frac{x^2}{4} + y^2}$

$A^2 = 4x^2(\frac{x^2}{4} + y^2)$

$f(x) = \frac{x^4}{4} + x^2y^2$

$f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{90000}{x^2}$

(4) $f'(x) = x^3 - \frac{180000}{x^3} = 0$

$x^6 = 180000$

(5) $L = \{\sqrt[6]{180000}\}$

(6) $y = \sqrt[3]{150}$ m $\approx 5{,}31$ m

$x = \sqrt[6]{180000}$ m $\approx 7{,}51$ m

$A^2 = x^4 + 4x^2y^2 \approx 3187{,}98 + 6375{,}95 = 9563{,}93$

$A \approx 97{,}8$ m²

**12. Tunnel:**

Das Gewölbe eines Tunnels hat einen Querschnitt von der Form einer Halbellipse mit horizontaler Hauptachse. Die Gesamtbreite beträgt $6\sqrt{2}$ m, die Höhe vom Gewölbeansatz bis zum Scheitel 2 m. Bei einer Vergrößerung des Tunnels soll das Gewölbe so ausgebrochen werden, dass sein Querschnitt zu einem gleichschenkeligen Dreieck wird, dessen Basis auf der Höhe der Hauptachse der Halbellipse liegt.

a) Wie breit wird der neue Tunnel, wenn der Gesteinsausbruch minimal sein soll?

b) Um wie viel wird die Querschnittsfläche vergrößert?

(1) u = x-Koordinate des Berührungspunktes P

(2) $0 < u < a$

(3) $2a = 6\sqrt{2}$

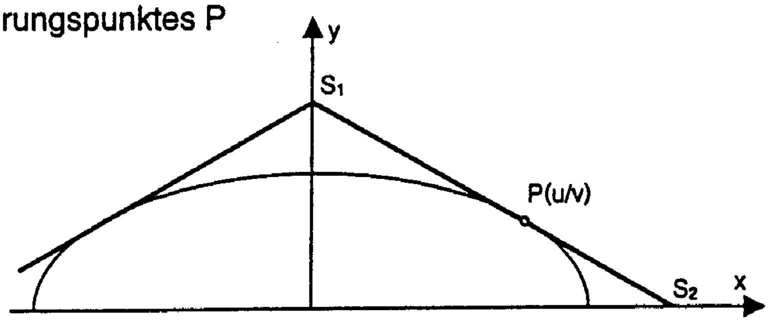
$a = 3\sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 18$

$b = 2 \Rightarrow b^2 = 4$

ell: $4x^2 + 18y^2 = 72$

$2x^2 + 9y^2 = 36$

$y = \frac{1}{3}\sqrt{36-2x^2}$




$P(u/v) \in$ ell

Tangente in P: $2ux + 9.\frac{1}{3}\sqrt{36-2u^2}\,y = 36$

$x = 0 \Rightarrow y = \frac{12}{\sqrt{36-2u^2}} \Rightarrow S_1(0/\frac{12}{\sqrt{36-2u^2}})$

$y = 0 \Rightarrow x = \frac{18}{u} \Rightarrow S_2(\frac{18}{u}/0)$

$A = \frac{1}{2}\frac{12}{\sqrt{36-2u^2}}\frac{18}{u}$

$f(u) = u^2(18-u^2) = 18u^2 - u^4$

(4) $f'(u) = 36u - 4u^3$

$4u(9-u^2) = 0$

$u_1 = 0,\quad u_2 = -3,\quad u_3 = 3$

(5) $L = \{3\}$

(6) $x = \frac{18}{u} = 6$

$y = \frac{12}{\sqrt{36-2u^2}} = \frac{12}{\sqrt{18}} = 2\sqrt{2}$

$A_{neu} = 6.2\sqrt{2}$ m² $\approx 16{,}97$ m²

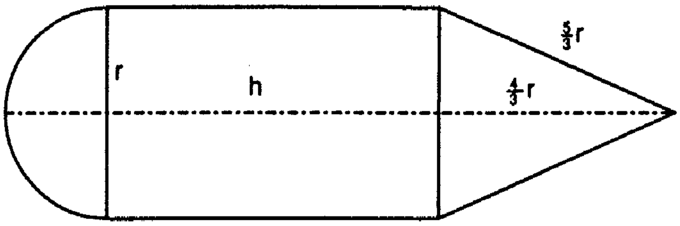
$A_{ell} = \frac{1}{2}ab\pi = \frac{3\cdot2\sqrt{2}}{2}\pi$ m² $\approx 13{,}32$ m²

Die Querschnittsfläche wird um ca. 3,65 m² vergrößert.

**13. Regattaboje 2:**

Ein Schwimmkörper besteht aus einem Zylinder mit einerseits aufgesetzter Halbkugel, andererseits mit aufgesetztem Kegel, jeweils von gleichem Radius. Die Kegelhöhe beträgt $\frac{4}{3}$ des Basiskreisradius.

Wie sind die Abmessungen der drei Teilkörper zu wählen, damit bei der Herstellung der Boje so wenig Blech wie möglich benötigt wird und der Inhalt $312\pi$ $E^3$ beträgt?




(1) r = gemeinsamer Radius

(2) $r > 0$

(3) $V = V_{Kugel} + V_{Zylinder} + V_{Kegel}$

$V = \frac{2}{3}r^3\pi + r^2\pi h + \frac{1}{3}r^2\pi\frac{4}{3}r = 312\pi$

$(\frac{2}{3} + \frac{4}{9})r^3 + r^2h = 312$

$\frac{10}{9}r^3 + r^2h = 312$

$r^2h = 312 - \frac{10}{9}r^3$

$rh = \frac{312}{r} - \frac{10}{9}r^2$

$2rh = \frac{624}{r} - \frac{20}{9}r^2$

$O = O_{Kugel} + O_{Zylinder} + O_{Kegel}$

$O = 2r^2\pi + 2r\pi h + r\pi\frac{5}{3}r$

$O = \frac{11}{3}r^2\pi + 2rh\pi$

$O = \pi(\frac{11}{3}r^2 + \frac{624}{r} - \frac{20}{9}r^2)$

$O = \pi(\frac{13}{9}r^2 + \frac{624}{r})$

$O = 13\pi(\frac{r^2}{9} + \frac{48}{r})$

$f(r) = \frac{r^2}{9} + \frac{48}{r}$

(4) $f'(r) = \frac{2}{9}r - \frac{48}{r^2} = 0$

$\frac{2}{9}r = \frac{48}{r^2}$

$r^3 = 216$

(5) $L = \{6\}$

(6) $h_{Zylinder} = \frac{312}{r^2} - \frac{10}{9}r = \frac{312}{36} - \frac{60}{9} = \frac{26}{3} - \frac{20}{3} = \frac{6}{3}$

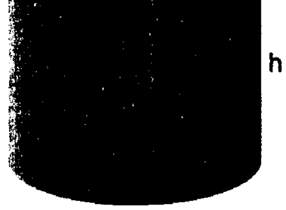
$h_{Zylinder} = 2$ E

$h_{Kegel} = 8$ E

$r = 6$ E

## 14. Konservendose:

Eine Konservendose hat die Form eines Zylinders und soll bei gegebenem Volumen von 1 $dm^3$ in Hinblick auf die Herstellungskosten eine möglichst kleine Oberfläche haben. Wie ist die zylindrische Dose zu dimensionieren?




(1) r = Zylinderradius

(2) $r > 0$

(3) $V = r^2\pi h = 1$

$h = \frac{1}{r^2\pi}$

$O = 2r(r + h)\pi$

$O = 2\pi(r^2 + rh)$

$O = 2\pi(r^2 + \frac{1}{r\pi})$

$f(r) = r^2 + \frac{1}{r\pi}$

(4) $f'(r) = 2r - \frac{1}{r^2\pi} = 0$

$2r = \frac{1}{r^2\pi}$

$r^3 = \frac{1}{2\pi}$

(5) $L = \{\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\}$

(6) $h = \frac{1}{\pi}(\sqrt[3]{2\pi})^2 = \sqrt[3]{\frac{4\pi^2}{\pi^3}} = 2\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} = 2r$

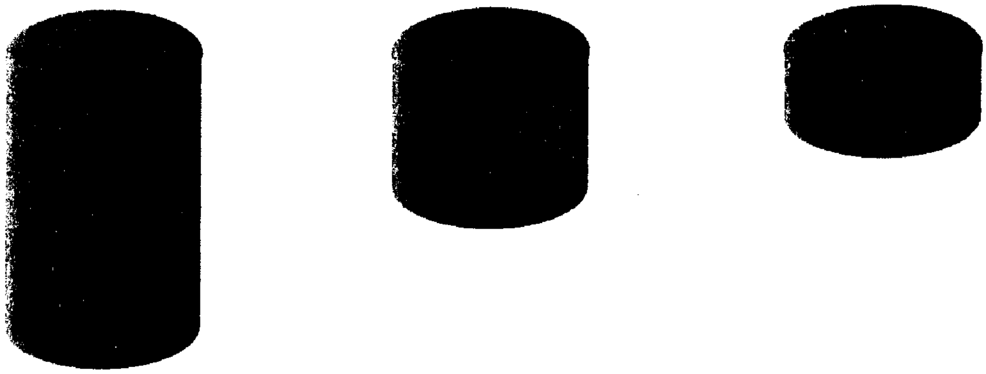
Unter allen Zylindern mit vorgegebenem Volumen hat der gleichseitige Zylinder (Durchmesser = Höhe) die kleinste Oberfläche.

Bemerkungen:
Die Rechnung verläuft genau so, wenn man V allgemein lässt.

Man erhält $h = 2r = 2.\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

Mehrere zylindrische Dosen besorgen, bei denen das Verhältnis h:d verschieden ist:

| Bierdose | Kompottdose | Fischdose |
|---|---|---|
| schmal, hoch | annähernd gleiche Größen | breit, niedrig |
| $h:d \approx 2:1$ | $h:d \approx 1:1$ | $h:d \approx 1:2$ |

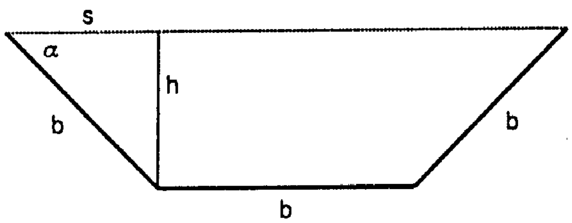


**15. Rinne mit trapezförmigen Querschnitt:**

Aus drei gleich breiten Brettern (Breite b) soll eine Rinne von trapezförmigem Querschnitt so angefertigt werden, dass mit ihr eine möglichst große Wassermenge abgeleitet werden kann. Welchen Winkel schließen die Bretter ein?

a) Löse mit Längen als Variable!

b) Löse mit Winkel als Variable!




(1) h = Trapezhöhe

(2) $0 < h < b$

(3) $c = b + 2s = b + 2\sqrt{b^2 - h^2}$

$\frac{c+b}{2} = \frac{2b+2\sqrt{b^2-h^2}}{2} = b + \sqrt{b^2 - h^2}$

$A = \frac{c+b}{2}h = bh + h\sqrt{b^2 - h^2}$

$f(h) = bh + h\sqrt{b^2 - h^2}$

(4) $f'(h) = b + (b^2 - h^2)^{½} + h½(b^2 - h^2)^{-½}(-2h)$

$f'(h) = 0$

$b(b^2 - h^2)^{½} + b^2 - h^2 - h^2 = 0$

$b(b^2 - h^2)^{½} = 2h^2 - b^2$

$b^2(b^2 - h^2) = 4h^4 - 4h^2b^2 + b^4$

(1) = Neigungswinkel der Seitenwände

(2) $90° < \alpha < 180°$

(3) $\sin\alpha = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b.\sin\alpha$

$\cos\alpha = \frac{s}{b} \Rightarrow s = b.\cos\alpha$

$c = b + 2s = b + 2b.\cos\alpha$

$\frac{c+b}{2} = b + b.\cos\alpha$

$A = \frac{c+b}{2}h = (b + b.\cos\alpha).b.\sin\alpha$

$f(\alpha) = .\sin\alpha.(1 + \cos\alpha)$

(4) $f'(\alpha) = \cos\alpha(1 + \cos\alpha) + \sin\alpha(-\sin\alpha) = 0$

$\sin^2\alpha - \cos^2\alpha - \cos\alpha = 0$

$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\alpha - \cos\alpha = 0$

$2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 0$

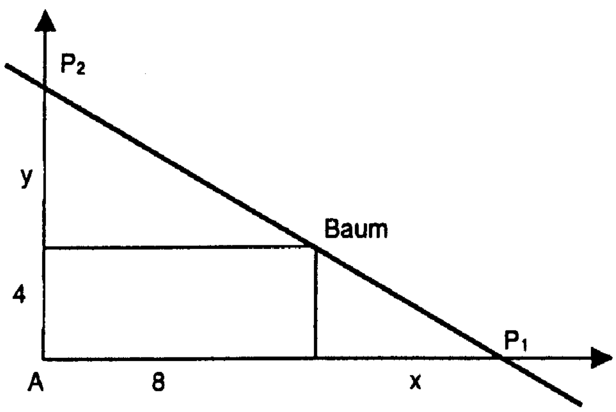
$b^4 - b^2h^2 = 4h^4 - 4h^2b^2 + b^4$
$3b^2h^2 = 4h^4$
$3b^2 = 4h^2$
(5) $L = \{\frac{\sqrt{3}}{2}b\}$
(6) $s^2 = b^2 - \frac{3}{4}b^2 = \frac{1}{4}b^2$
$s = \frac{b}{2} \Rightarrow \alpha = 60°$
$A = \frac{3b}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}b = \frac{3\sqrt{3}}{4}b^2$

$\cos^2\alpha + ½\cos\alpha - ½ = 0$
$(\cos\alpha + 1)(\cos\alpha - ½) = 0$
$\cos\alpha_1 = -1 \Rightarrow \alpha_1 = 180°$
$\cos\alpha_2 = ½ \Rightarrow \alpha_2 = 60°$
(5) $L = \{60°\}$
(6) $h = \frac{\sqrt{3}}{2}b$
$s = \frac{b}{2}$

Bemerkung:
Modell aus 5 gleich langen Stäben mitbringen ($c = 2b$).

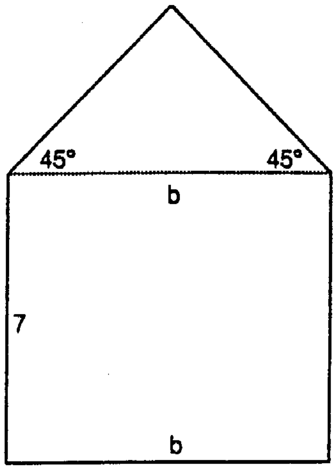
**16. Grundstücksverkleinerung:**
Auf einem rechteckigen Ackergrundstück ABCD, das mit der Ecke A an eine Straßenkreuzung grenzt, steht ein Baum B. Er ist 8 m von AD und 4 m von AB entfernt. Wegen einer Straßenverbreiterung bei der Kreuzung soll die Ecke A durch einen geradlinigen, dicht am Baum vorbeiführenden Zaun abgetrennt werden.
a) Der Grundbesitzer will so wenig wie möglich Grund verlieren. Wie ist der Zaun zu ziehen (= Gleichung der Geraden)?
b) Wie lande ist der Zaun?
c) Wie groß ist das abgetrennte Flächenstück?

(1) x auf $\overline{AP_1}$ laut Skizze
(2) $0 < x < \overline{AB}$
(3) Strahlensatz: $4:x = y:8$
$y = \frac{32}{x}$
$A = ½(8 + x)(4 + y)$
$A = ½(8 + x)(4 + \frac{32}{x})$
$A = 2(8 + x)(1 + \frac{8}{x})$
$A = 2(8 + x + \frac{64}{x} + 8)$
$A = 2(16 + x + \frac{64}{x})$
$f(x) = 16 + x + \frac{64}{x}$
(4) $f'(x) = 1 - \frac{64}{x^2} = 0$
$x^2 = 64$
(5) $L = \{8\}$
(6) $y = 4$
$P_1(16/0)$, $P_2(0/8)$
$l^2 = 16^2 + 8^2 = 320$
$l = \sqrt{320}$ m $\approx 17{,}9$ m
$g: y = -½x + 8$
$g: x + 2y = 16$




**17. Wohnraumausnützung:**
Ein Haus soll einen rechteckigen Grundriss erhalten und bis zur Dachtraufe 7 m hoch sein. Darüber erhebt sich ein Giebeldach mit einem Neigungswinkel von 45°. Die Außenmauern bestehen also aus zwei Rechtecken und zwei unregelmäßigen Fünfecken, deren Gesamtfläche 430 m² beträgt.

Wie sind die Abmessungen des Grundrechteckes zu wählen, wenn der quaderförmige Raum bis zur Dachtraufe für das Wohnen gedacht ist und möglichst groß sein soll?




(1) b = Breite des Hauses =
= Basis der fünfeckigen Hausmauer

(2) $b > 0$

(3) $2(7b + \frac{b^2}{4}) + 2.7b = 430$

$28b + b^2 + 28l = 860$

$28l = 860 - 28b - b^2$

$V = 7lb$

$f(b) = (860 - 28b - b^2)b$

$f(b) = 860b - 28b^2 - b^3$

(4) $f'(b) = 860 - 56b - 3b^2 = 0$

$b^2 + \frac{56}{3}b - \frac{860}{3} = 0$

$b_{1,2} = -\frac{28}{3} \pm \sqrt{\frac{784}{9} + \frac{2580}{9}} = -\frac{28}{3} \pm \sqrt{\frac{3364}{9}} = -\frac{28}{3} \pm \frac{58}{3}$

(5) $L = \{10\}$

(6) $l = \frac{1}{28}(860 - 280 - 100) = \frac{480}{28}$

$l = \frac{120}{7}$

$V = 7.10.\frac{120}{7}\ m^3 = 1200\ m^3$

**18. Bewegungsaufgabe:**

Zwei Körper bewegen sich gleichförmig auf geraden Bahnen in Richtung des Schnittpunktes. Die Bahnen schließen den Winkel $\beta$ ein. Die Entfernungen zum Schnittpunkt betragen a bzw. b (in m), die Geschwindigkeiten $c_1$ und $c_2$ (in m/s).

a) Wann ist die Entfernung der beiden Körper am kleinsten?

b) Welche einfachere Beziehung ergibt sich für $\beta = 90°$?

c) Welche Ergebnisse erhält man für a = 100 m, b = 80 m,
$c_1 = 10$ m/s, $c_2 = 15$ m/s,
$\beta = 60°$?

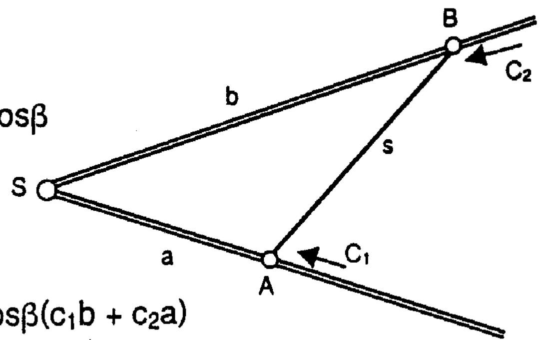
a)

(1) t = Zeit

(2) $(t > 0) \wedge (a - c_1t > 0) \wedge (b - c_2t > 0)$

(3) Cosinussatz:

$s^2 = (a - c_1t)^2 + (b - c_2t)^2 - 2(a - c_1t)(b - c_2t)\cos\beta$




(4) $f'(t) = 2(a - c_1t)(-c_1) + 2(b - c_2t)(-c_2) -$
$- 2\cos\beta[-c_1(b - c_2t) - c_2(a - c_1t)] = 0$

$f'(t) = -2ac_1 + 2c_1^2t - 2bc_2 + 2c_2^2t -$
$- 2\cos\beta(-c_1b - c_2a + 2c_1c_2t) = 0$

$t(2c_1^2 + 2c_2^2 - 4c_1c_2\cos\beta) = 2ac_1 + 2bc_2 - 2\cos\beta(c_1b + c_2a)$

$t(c_1^2 + c_2^2 - 2c_1c_2\cos\beta) = ac_1 + bc_2 - \cos\beta(c_1b + c_2a)$

(5) $L = \left\{\frac{ac_1 + bc_2 - (ac_2 + bc_1)\cos\beta}{c_1^2 + c_2^2 - 2c_1c_2\cos\beta}\right\}$

b)

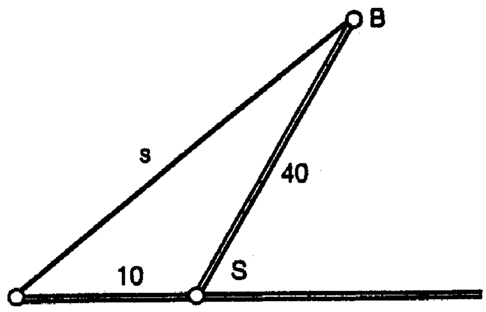
$\beta = 90° \Rightarrow \cos\beta = 0 \Rightarrow t = \frac{ac_1 + bc_2}{c_1^2 + c_2^2}$

c)

$\cos 60° = 0{,}5$

$t = \frac{1000+1200-(1500+800)0{,}5}{100+225-150} = \frac{1000+1200-1150}{175} = \frac{1050}{175}$

$t = 6$ s




$a - c_1t = 100 - 60$ m $= 40$ m

$b - c_2t = 80 - 90$ m $= - 10$ m $\Rightarrow$ Das Problem ist mit Grundmenge aus (2) nicht lösbar.

**19. Kellerfenster:**

Ein Kellerfenster soll die Form eines Rechteckes mit aufgesetztem Halbkreis erhalten. Der Umfang soll U sein. Wie sind die Abmessungen des Rechteckes zu wählen, dass das Fenster möglichst viel Licht einlässt?

(1) r = Radius des Halbkreises

(2) $r > 0$

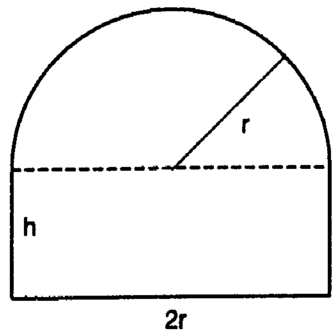
(3) $U = r\pi + 2r + 2h$

$2h = U - (r\pi + 2r)$

$A = 2rh + \frac{\pi}{2}r^2$

$A = Ur - r(r\pi + 2r) + \frac{\pi}{2}r^2$

$A(r) = Ur - (2 + \frac{\pi}{2})r^2$




(4) $A'(r) = U - 2(2 + \frac{\pi}{2})r = 0$

$U = (4 + \pi)r$

(5) $L = \{\frac{U}{4+\pi}\}$

(6) $2h = U - r(\pi + 2)$

$2h = U - \frac{U}{4+\pi}(\pi + 2)$

$2h = \frac{U(\pi+4)-U(\pi+2)}{\pi+4} = \frac{2U}{4+\pi}$

$h = r$

Bemerkung:

Vergleiche mit dem Beispiel Kanal!

**20. Kanal:**

Ein Kanalquerschnitt soll die Form eines Rechteckes mit aufgesetztem Halbkreis erhalten. Die Querschnittsfläche soll A sein. Wie sind die Abmessungen des Rechteckes zu wählen, damit für die Ummauerung so wenig wie möglich Material gebraucht wird?

(1) r = Radius des Halbkreises

(2) $r > 0$

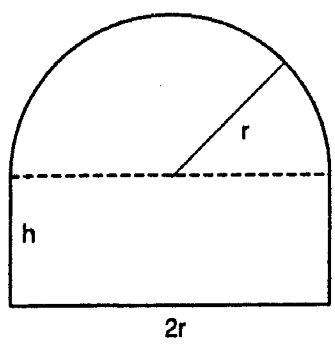
(3) $A = 2rh + \frac{\pi}{2}r^2$

$2rh = A - \frac{\pi}{2}r^2$

$h = \frac{2A-r^2\pi}{4r}$

$U = r\pi + 2r + 2h$

$U(r) = \frac{2A-r^2\pi}{2r} + 2r + r\pi$



$U(r) = A\frac{1}{r} + (2 + \frac{\pi}{2})r$

(4) $U'(r) = -\frac{1}{r^2}A + (2 + \frac{\pi}{2}) = 0$

$2\frac{A}{r^2} = 4 + \pi$

(5) $L = \{\sqrt{\frac{2A}{4+\pi}}\}$

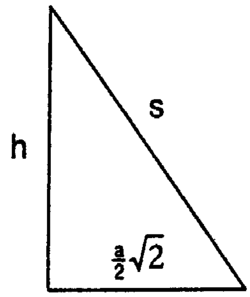
(6) $h = \frac{2A - r^2\pi}{4r}$

$$h = \frac{2A - \frac{2A}{4+\pi}\pi}{4\sqrt{\frac{2A}{4+\pi}}} = \frac{2A\pi + 8A - 2A\pi}{(4+\pi)4\sqrt{\frac{2A}{4+\pi}}} = \frac{8A}{4(4+\pi)\sqrt{\frac{2A}{4+\pi}}} = \frac{2A}{(4+\pi)\sqrt{\frac{2A}{4+\pi}}} = \sqrt{\frac{4A^2}{(4+\pi)^2\frac{2A}{4+\pi}}}$$

$h = \sqrt{\frac{2A}{4+\pi}} = r$

<u>Bemerkung:</u>
Vergleiche mit dem Beispiel Kellerfenster!

**<u>21. Wir bauen ein Zelt:</u>**
Aus 4 Stangen der Länge s soll eine Zeltpyramide mit quadratischer Grundfläche und möglichst großem Volumen hergestellt werden!
h = Höhe der Pyramide




(1) $0 < h < s$

(2) a = Seite des Grundquadrates

$s^2 = h^2 + \frac{1}{2}a^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 2(s^2 - h^2)$

$V = \frac{a^2h}{3} \quad \Rightarrow \quad \bar{V} = a^2h = (s^2 - h^2)h = s^2h - h^3$

(3) $\bar{V}' = \bar{f}'(h) = s^2 - 3h^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{s}{3}\sqrt{3}$

(4) $L = \{\frac{s}{3}\sqrt{3}\}$

(5) $V_{max} = \frac{a^2h}{3} = \frac{2(s^2 - \frac{s^2}{3})}{3}\cdot\frac{s}{3}\sqrt{3} = \frac{2\frac{2}{3}s^2)}{3}\cdot\frac{s}{3}\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{27}s^3$

**<u>22. Umsatz steigern:</u>**
Ein Verlag hat durch eine Umfrage festgestellt, dass zu den 1000 Beziehern einer Zeitschrift immer dann weitere 100 hinzukommen würden, wenn man den ursprünglichen Bezugspreis von 300.- ATS um jeweils 10.- ATS senken würde. Welcher Preis ist für den Verlag am günstigsten?

(1) n = Anzahl der Preisreduktionen zu je 10.- ATS

(2) $(n \in \mathbb{Z}) \wedge (n < 30)$

(3) $G = f(n) = (1000 + 100n).(300 - 10n)$

$G = f(n) = -1000n^2 + 20\,000n + 300\,000$

$\bar{G} = \bar{f}(n) = -n^2 + 20n + 30$

(4) $\bar{G}' = \bar{f}'(n) = -2n + 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad n = 10$

$\bar{G}'' = -2$

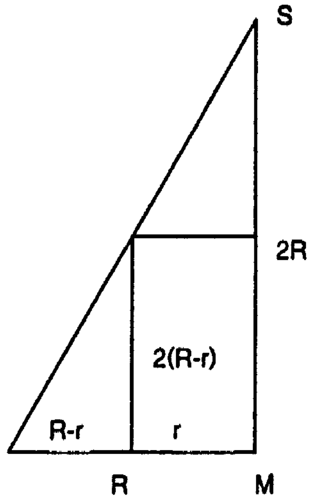
(5) $L = \{10\}$

(6) Optimal sind 2000 Bezieher und ein Bezugspreis von 200.- ATS. Daraus ergibt sich der maximale Gewinn von 400 000.- ATS.

**23. Kegel mit unendlich vielen eingeschriebenen Zylindern:**

Gegeben ist ein Kegel, dessen Höhe doppelt so hoch ist wie sein Radius R.
Diesem Kegel ist der volumsgrößte Zylinder einzuschreiben. Wie groß ist dieses? In welchem Verhältnis steht es zum Kegelvolumen?
Dem Restkegel ist auf gleiche Art wieder ein Zylinder einzuschreiben, u.s.w. Wie groß ist das Volumen aller Zylinder? In welchem Verhältnis steht es zum Kegelvolumen?

(1) $r$ = Zylinderradius
(2) $0 < r < R$
(3) $V_Z = r^2\pi h = r^2\pi 2(R - r)$
(4) $f'(r) = 2Rr - 3r^2 = 0$
$r(2r - 3r) = 0 \quad r \neq 0$
$3r = 2R$
(5) $L = \{\frac{2}{3}R\}$
$h = 2(R - r) = \frac{2}{3}R$
(6) $V_{max} = \frac{4}{9}R^2\pi\frac{2}{3}R = \frac{8}{27}R^3\pi$
$V_{max} : V_{Kegel} = \frac{8}{27} : \frac{2}{3} = 4 : 9$




Wegen der zentrischer Ähnlichkeit mit Zentrum S ergibt sich eine geometrische Reihe mit $q = \frac{8}{27}$.

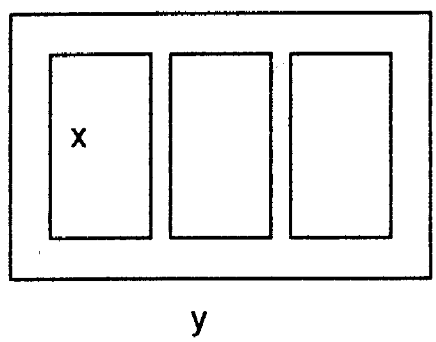
$$V_\infty = \frac{V_1}{1-q} = \frac{\frac{8}{27}R^3\pi}{\frac{19}{27}} = \frac{8}{19}R^3\pi$$

$V_\infty : V_K = \frac{8}{27}R^3\pi : \frac{2}{3}R^3\pi = 12 : 19$

**24. Wohnfläche:**

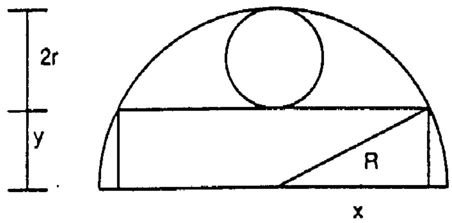
Ein Haus mit rechteckigem Grundriss hat 25 cm dicke Außenwände. Zwei zueinander parallele Zwischenwände sind 10 cm dick. Die Querschnittfläche der Mauern soll 14 m² nicht überschreiten (Türen und Fenster bleiben unberücksichtigt). Welche Außenmaße hat dieses Haus, wenn die Wohnfläche maximal sein soll?

(1) $x$ = Länge eines Zimmers
(2) $y$ = Breite des gesamten Hauses
$d$ = Außenmauerdicke = 0,25 m
$a$ = Zwischenmauerdicke = 0,1 m
(3) $A = (y - 0{,}5)x - 0{,}2x$
$14 = y.0{,}25.2 + x.0{,}25.2 + x.0{,}1.2$
$14 = 0{,}5y + 0{,}7x$
$y = 28 - 1{,}4x$
(4) $f(x) = (27{,}5 - 1{,}4x)x - 0{,}2x$
$f(x) = 27{,}3x - 1{,}4x^2$
(5) $f'(x) = 27{,}3 - 2{,}8x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 9{,}75$ m
$f''(x) = -2{,}8 \qquad y = 14{,}35$ m
(6) $A = 133{,}0875$ m²



## 25. Käseglocke:

In einer halbkugelförmigen Käseglocke (R = 12 cm) sollen ein Stück zyliderförmiger Käse (Nährwert 9 kJ/cm³) und ein Stück kugelförmiger Käse mit 18 kJ/cm³ Nährwert untergebracht werden. Bei welchen Dimensionen ist die Energie maximal?




(1) $x$ = Zylinderradius

(2) $0 < x < R$

(3) $x^2 + y^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = R^2 - y^2$

$2r + y = R \quad \Rightarrow \quad r = \frac{R-r}{2}$

$E(x) = 9x^2\pi y + 18\frac{4r^3\pi}{3}$

$f(y) = R^2y - y^3 + \frac{2\cdot4}{8\cdot3}(R^3 - 3R^2y + 3Ry^2 - y^3)$

(4) $f'(y) = R^2 - 3y^2 + \frac{1}{3}(-3R^2 + 6Ry - 3y^2) = 0$

$\Rightarrow 3R^2 - 9y^2 - 3R^2 + 6Ry - 3y^2 = 0$

$-12y^2 + 6Ry = 0$

$y_1 = 0 \quad y_2 = ½R$

$f''(y) = -6y + 2R - 2y$

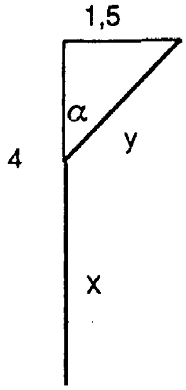
$f''(½R) = -2R$

(5) $L = \{\frac{R}{2}\}$

(6) $E = 9.108.6\pi + 6.4.27\pi = 6\,480\pi$ kJ $\approx$ 20 357,5 kJ $\approx 20{,}3\,.\,10^3$ kJ

## 26. Flüssigkeitstransport im Baum:

Der Wassertransport im Hauptstamm eines Baumes unterliegt einem geringeren Widerstand als in den verzweigenden Ästen. Das Verhältnis der Widerstände ist artspezifisch. Es läßt sich zeigen, dass es daher für jede Abzweigung einen zeitoptimalen Winkel gibt, unter dem der Ast aus dem Hauptstamm wachsen muss, um Wasser- und Nährstofftransport möglichst gut funktionieren zu lassen. Angenommen, ein Blatt eines Mostbirnenbaumes befindet sich in 4 m Höhe über dem Boden und sitzt auf einem Ast 1,5 m (waagrecht) vom Stamm entfernt. Im Hauptstamm sei die Fließgeschwindigkeit 1,2 mal so groß wie im abzweigenden Ast. Welcher Winkel ist dann optimal?




(1) $\alpha$ = Verzweigungswinkel

(2) $0° < \alpha < 90°$

(3) $\sin\alpha = \frac{1{,}5}{y} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1{,}5}{\sin\alpha}$

$\cos\alpha = \frac{4-x}{y} \quad \Rightarrow \quad x = 4 - y.\cos\alpha$

$t = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} = \frac{x}{1{,}2v} + \frac{y}{v}$

$t = \frac{4 - \frac{1{,}5}{\sin\alpha}\cos\alpha}{1{,}2v} + \frac{\frac{1{,}5}{\sin\alpha}}{v} = \frac{1}{1{,}2v}\cdot\frac{4\sin\alpha - 1{,}5\cos\alpha + 1{,}8}{\sin\alpha}$

(4) $f(\alpha) = \frac{4\sin\alpha - 1{,}5\cos\alpha + 1{,}8}{\sin\alpha}$

$f'(\alpha) = \frac{(4\cos\alpha + 1{,}5\sin\alpha)\sin\alpha - (4\sin\alpha - 1{,}5\cos\alpha + 1{,}8)\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{4\sin\alpha\cos\alpha + 1{,}5\sin^2\alpha - 4\sin\alpha\cos\alpha + 1{,}5\cos^2\alpha - 1{,}8\cos\alpha}{\sin^2\alpha} =$

$= \frac{1{,}5 - 1{,}8\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = 1{,}5\frac{1 - 1{,}2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$

$f'(\alpha) = 0 \Rightarrow 1 - 1{,}2\cos\alpha = 0$

$\cos\alpha = \frac{1}{1{,}2}$

$\alpha \approx 33{,}56°$

(5) $L = \{33{,}56\}$

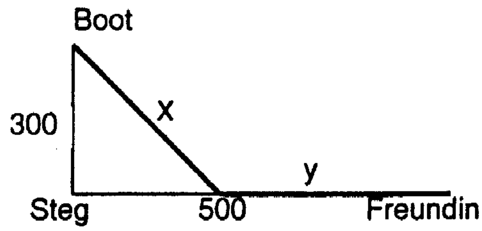
(6) Der optimale Winkel beträgt ca. 34°.

Bemerkung:
Diese Aufgabe ist auch mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes lösbar (vgl. nächstes Beispiel).

Die vereinfachte Zielfunktion lautet dann: $f(x) = x + 1{,}2\sqrt{x^2 - 8x + 18{,}25}$ und führt auf die Lösung $x \approx 1{,}73$.

**27. Zwei Freunde:**

Ein junger Mann befindet sich in einem Mietboot auf einem See. Er hat sich 300 m in normaler Richtung zum geradlinig verlaufenden Ufer vom Bootssteg entfernt und will in kürzester Zeit seine Freundin erreichen, die sich 500 m vom Steg entfernt am Strand sonnt. Wo muss der junge Mann landen, wenn er in 1 Stunde 5 km weit gehen, aber nur 4 km/h rudern kann? Wie lange ist er unterwegs?




(1) $y$ = Entfernung Landepunkt – Freundin

(2) $0 \le y \le 0{,}5$ (in km)

(3) $x$ = Entfernung Boot – Landepunkt

$t = \frac{s}{v}$

$s_1 = x = \sqrt{0{,}09 + (0{,}5 - y)^2} = \sqrt{y^2 - y + 0{,}34}$

$s_2 = y$

$f(y) = \frac{y}{5} + \frac{1}{4}\sqrt{y^2 - y + 0{,}34}$

(4) $f'(y) = \frac{1}{5} + \frac{1}{4}\frac{2y-1}{2\sqrt{y^2-y+0{,}34}} = 0$

$8\sqrt{y^2 - y + 0{,}34} + 10y - 5 = 0$

$8\sqrt{y^2 - y + 0{,}34} = 5 - 10y$

$64y^2 - 64y + 21{,}76 = 25 - 100y + 100y^2$

$36y^2 - 36y + 3{,}24 = 0$

$y^2 - y + 0{,}09 = 0$

$y_{1,2} = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}16}$

(5) $L = \{0{,}1\}$ $y_2 = 0{,}9$ nicht sinnvoll!

$f(0{,}1) = \frac{0{,}1}{5} + \frac{1}{4}\sqrt{0{,}01 - 0{,}1 + 0{,}34} = 0{,}02 + 0{,}25.0{,}5 = 0{,}02 + 0{,}125 = 0{,}145$

$0{,}145$ h = $0{,}145.60$ min = $8{,}7$ min

(6) Der junge Mann muss 100 m neben seiner Freundin an Land gehen und ist ca. 9 Minuten unterwegs.

Anschrift der Autoren:
BG und BRG, Josefstraße 84, 3100 St.Pölten